

# חשבון דיפרנציאלי

פרק 22 - נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות

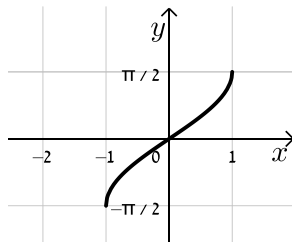
תוכן העניינים

1. נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות.....1

## נושאים מתקדמים – פונקציות טריגונומטריות

### סיכום כללי

#### הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

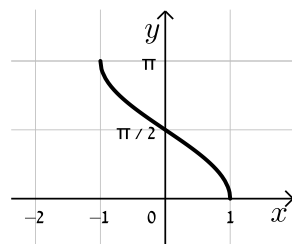


תיאור גרפי של הפונקציה  $f(x) = \arcsin(x)$  :

סימון נוסף:  $f(x) = \sin^{-1}(x)$  .

תחום הגדרה:  $-1 \leq x \leq 1$  .

טווח:  $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$  .

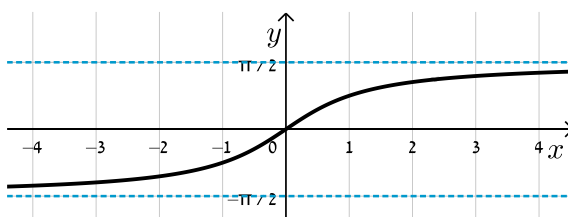


תיאור גרפי של הפונקציה  $f(x) = \arccos(x)$  :

סימון נוסף:  $f(x) = \cos^{-1}(x)$  .

תחום הגדרה:  $-1 \leq x \leq 1$  .

טווח:  $0 \leq f(x) \leq \pi$  .

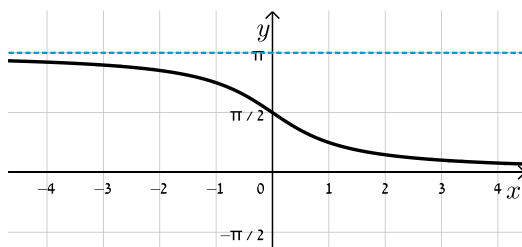


תיאור גרפי של הפונקציה  $f(x) = \arctan(x)$  :

סימון נוסף:  $f(x) = \tan^{-1}(x)$  .

תחום הגדרה:  $-\infty < x < \infty$  .

טווח:  $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$  .



תיאור גרפי של הפונקציה  $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$  :

סימון נוסף:  $f(x) = \cot^{-1}(x)$  .

תחום הגדרה:  $-\infty < x < \infty$  .

טווח:  $0 < f(x) < \pi$  .

## קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

| הפונקציה | הזהות                                                                                                                                                                                                 |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| סינוס    | $\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$                                                                                                                                                       |
|          | $\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ |
| קוסינוס  | $\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$                                                                                                                                                       |
|          | $\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$                                                            |
| טנגנס    | $\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$                                                                                                                                                   |
|          | $\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$                                                                                                             |
| קוטנגנס  | $\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$                                                                                                                                                   |
|          | $\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$                                                                                                                                        |

## שאלות

בשאלות 1-12 חשבו ללא מחשבון:

- |                                               |                                                               |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\arccos(-1)$ (2)                             | $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (1)                 |
| $\arctan(-\sqrt{3})$ (4)                      | $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (3)    |
| $\arcsin(-0.5)$ (6)                           | $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (5)                       |
| $\sin(\arcsin(-0.5))$ (8)                     | $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (7)     |
| $\cos(\operatorname{arccot}(1))$ (10)         | $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ (9) |
| $\tan(-\operatorname{arccot}(\sqrt{3}))$ (12) | $\sin(2\arctan(\sqrt{3}))$ (11)                               |

בשאלות 13-15 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות :

$$y = \arccos \frac{x+3}{2x+1} \quad (14)$$

$$y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x} \quad (13)$$

$$y = \arctan \frac{1}{1-\ln x} \quad (15)$$

בשאלות 16-19, הוכיחו כי לכל  $x$  מתחום ההגדרה מתקיים :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

$$\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (17)$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (18)$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0 \quad (19)$$

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi \quad (20) \text{ הראו את הקשר}$$

### תשובות סופיות

|                                  |                                            |                                           |                            |
|----------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------|
| $-\frac{\pi}{3} \quad (4)$       | $\frac{\pi}{3} \quad (3)$                  | $\pi \quad (2)$                           | $-\frac{\pi}{4} \quad (1)$ |
| $-\frac{1}{2} \quad (8)$         | $-\frac{\pi}{6} \quad (7)$                 | $-\frac{\pi}{6} \quad (6)$                | $\phi \quad (5)$           |
| $-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (12)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$            | $1 \quad (10)$                            | $\frac{1}{2} \quad (9)$    |
| $x > 0, x \neq e \quad (15)$     | $x \leq -\frac{4}{3}, x \geq 2 \quad (14)$ | $x \leq \frac{2}{5}, x \geq 4 \quad (13)$ |                            |

(16) - (20) שאלות הוכחה.